

**MISURA DELLA SENSIBILITA' STRUTTURALE AGLI
EFFETTI DEL SECONDO ORDINE: ASPETTI CRITICI NELLA
NORMATIVA SISMICA**

**PARAMETERS FOR MEASURING STRUCTURAL
SENSITIVITY TO SECOND-ORDER EFFECTS: SEISMIC CODE
CRITICAL ISSUES**

Vincenzo Piluso
University of Salerno
Department of Civil Engineering
 Fisciano (SA), Italy
v.piluso@unisa.it

ABSTRACT

These notes are intended to show the conceptual mistakes which, according to the Author opinion, can be recognized in the codified rules accounting for second-order effects in the seismic design of structures.

First, the difference between structural sensitivity to second-order effects in the elastic range and structural sensitivity to second order effects in the plastic range is clarified. The attention is also focused on the conceptual difference between the structural parameter for measuring the sensitivity to second-order effects and the demand parameter for measuring the level of safety against the phenomenon of dynamic instability. Furthermore, the different behaviour that occurs in real multi-storey structures compared to SDOF systems is highlighted, underlining the uncoupling between second-order effects in the elastic range and second-order effects in the plastic range.

SOMMARIO

Queste note hanno lo scopo di mostrare gli errori concettuali che, a parere dello scrivente, sono attualmente presenti nelle regole codificate per tenere conto degli effetti del secondo ordine nella progettazione sismica delle strutture.

In primo luogo viene chiarita la differenza tra sensibilità agli effetti del secondo ordine in campo elastico e sensibilità agli effetti del secondo ordine in campo plastico. Inoltre, l'attenzione viene focalizzata sulla differenza concettuale che intercorre tra parametro strutturale atto alla misura della

sensibilità agli effetti di secondo ordine e parametro di domanda atto a misurare il livello di sicurezza nei confronti del fenomeno dell'instabilità dinamica. Successivamente, viene evidenziato il diverso comportamento che si verifica nelle strutture reali multipiano rispetto ai sistemi SDOF, sottolineando il disaccoppiamento tra effetti del secondo ordine in campo elastico ed effetti del secondo ordine in campo plastico.

1 EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NEI SISTEMI SDOF

È noto che l'equazione del moto di un sistema SDOF non lineare soggetto a moto sismico può essere scritta nella forma seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + V(x) = -m\ddot{x}_s \quad (1)$$

dove m è la massa del sistema strutturale, c è il coefficiente di smorzamento viscoso, x è lo spostamento della massa rispetto al suolo, $V(x)$ è la forza di richiamo non lineare, inclusi gli effetti del secondo ordine, e \ddot{x}_s è l'accelerazione al suolo.

Per chiarire quale sia il parametro strutturale che misura effettivamente la sensibilità agli effetti del secondo ordine, l'attenzione deve essere focalizzata sulla forza di richiamo non lineare che si verifica nel caso di un sistema SDOF elastico-perfettamente plastico quando gli effetti del secondo ordine vengono presi in considerazione. A questo scopo è sufficiente fare riferimento al comportamento strutturale non lineare in condizioni di carico statiche.

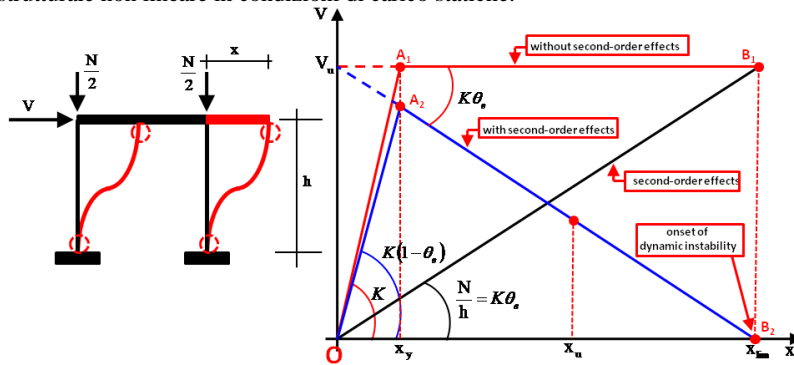


Fig. 1. Curve di comportamento di sistemi SDOF

Con riferimento alla Fig.1, ove si includano gli effetti del secondo ordine, l'equazione di equilibrio durante la fase di comportamento elastico della struttura è data da:

$$V + \frac{Nx}{h} = Kx \quad \text{ossia} \quad V = Kx \left(1 - \frac{N}{Kh}\right) = Kx(1 - \theta_e) \quad (2)$$

dove:

$$\theta_e = \frac{N}{Kh} = \frac{Nx}{V_{1st} h} \quad (3)$$

essendo V_{1st} il tagliante esterno alla base del primo ordine, ossia il tagliante interno.

L'equazione di equilibrio durante il comportamento plastico della struttura è data da:

$$V + \frac{Nx}{h} = V_u \quad \text{ossia} \quad V = V_u - K \frac{N}{Kh} x = V_u - K\theta_e x \quad (4)$$

Le equazioni (2) e (4) mostrano che, nel caso dei sistemi SDOF, esiste un accoppiamento tra effetti del secondo ordine in campo elastico ed effetti del secondo ordine in campo plastico. Il significato di questa affermazione è che lo stesso parametro, θ_e , cioè il coefficiente di stabilità [1,2], è una misura della sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine sia in campo elastico che in campo

plastico. È anche importante sottolineare che la Eq. (4) è la cosiddetta curva di equilibrio del meccanismo per il caso semplice di un sistema SDOF [3, 4].

Con riferimento alla Fig. 1, è utile notare che la curva bilineare OA_1B_1 rappresenta il comportamento strutturale trascurando gli effetti del secondo ordine. La retta OB_1 rappresenta i soli effetti del secondo ordine. Infine, la curva bilineare OA_2B_2 è il comportamento complessivo del sistema strutturale che si verifica quando vengono presi in considerazione gli effetti del secondo ordine. Soprattutto, dall'Eq. (4) o dalla Fig. 1, si riconosce subito che è possibile individuare un valore limite della domanda di spostamento, x_{lim} . Questo valore limite è quello corrispondente ad una forza di richiamo pari a zero. Ciò significa che per richieste di spostamento superiori a x_{lim} la forza di richiamo è negativa, spingendo la struttura a collasso inevitabile. Sotto le azioni sismiche, il verificarsi di tale condizione fa sì che l'equilibrio non sia più possibile e la domanda di spostamento tende all'infinito. Questo fenomeno è solitamente chiamato instabilità dinamica. È anche importante sottolineare che, per un dato sistema strutturale (cioè dati valori di m , c , K , V_u e θ_e) l'instabilità dinamica è un fenomeno correlato alla domanda di spostamento sismico.

La domanda di spostamento corrispondente alle condizioni di incipiente instabilità dinamica è immediatamente derivata dall'Eq. (4) per $V = 0$, che fornisce:

$$x_{lim} = \frac{V_u}{K\theta_e} \quad (5)$$

Inoltre, è utile notare che l'Eq. (3) mostra che:

$$K\theta_e = \frac{N}{h} = \frac{V_u}{x_{lim}} \quad (6)$$

Questa relazione mostra che la pendenza negativa della curva di equilibrio del meccanismo è uguale alla pendenza della retta che rappresenta gli effetti del secondo ordine (Fig. 1).

È di fondamentale importanza per la corretta impostazione delle raccomandazioni normative riconoscere che, dato il coefficiente di stabilità θ_e , sia la rigidezza ridotta per gli effetti del secondo ordine in campo elastico, $K(1 - \theta_e)$, sia la pendenza negativa del ramo plastico $K\theta_e$ sono completamente definiti. Ciò significa che, nel caso dei sistemi SDOF, il coefficiente di stabilità θ_e è l'unico parametro necessario per misurare la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine, sia in campo elastico che in campo plastico.

Il coefficiente di stabilità θ_e viene correntemente espresso secondo l'Eq. (3), a condizione che la struttura sia in campo elastico, perché la (3) è valida nell'ipotesi $K = V_{1st}/x$, che vale per $x \leq x_y$. Nel tentativo di misurare la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine, l'attuale versione dell'Eurocodice 8 ha esteso l'Eq. (3) al campo plastico assumendo un parametro dato da:

$$\theta_p = \frac{N x}{V_{1st} h} = \frac{N q x_e}{V_{1st} h} \quad (7)$$

che seppure formalmente coincidente con l'Eq. (3), risulta concettualmente significativamente diversa non appena, secondo EN1998-1, lo spostamento da utilizzare nel calcolo di θ_p è lo spostamento ultimo atteso $x = \mu x_y \cong q x_y = q x_e$ che si verifica quando la struttura ha raggiunto le condizioni ultime corrispondenti al fattore di struttura q .

L'irrazionalità e la debolezza dell'Eq. (7) saranno analizzate di seguito discutendo anche la differenza tra i sistemi SDOF e le strutture reali MDOF. Nel frattempo si dimostra che il parametro θ_p , dato dall'Eq. (7), non è un parametro che misura la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine. Si tratta, invece, di un parametro di domanda sismica che misura il livello di sicurezza rispetto al fenomeno dell'instabilità dinamica.

Infatti, tenendo conto che quando la struttura è in campo plastico $V_{1st} = V_u$, è evidente che il parametro θ_p raggiunge un valore limite pari a 1.0 al raggiungimento della condizione di instabilità

dinamica incipiente. Questo può essere riconosciuto dall'Eq. (6) verificando che l'insorgere dell'instabilità dinamica porta a:

$$\theta_p = \frac{N x_{lim}}{V_u h} = 1.0 \quad (8)$$

Pertanto, secondo l'Eq. (7), il parametro θ_p fornisce valori compresi tra 0 e 1,0 a seconda della richiesta di spostamento. Ovviamente, $\theta_p = 0$ quando lo spostamento è uguale a 0 o $N=0$. Quando la struttura raggiunge il primo snervamento (essendo x_y lo spostamento di snervamento):

$$\theta_p = \frac{N x_y}{V_u h} = \frac{N}{K h} = \theta_e \quad (9)$$

Infine, l'inizio dell'instabilità dinamica corrisponde all'Eq. (8).

La discussione precedente mostra chiaramente che il parametro θ_p , valutato secondo l'Eq. (7), non è un parametro che misura la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine, ma è un parametro di domanda sismica, dipendente dalla domanda di spostamento, che misura il livello di sicurezza nei confronti del fenomeno dell'instabilità dinamica, il cui valore di stato limite risulta pari a 1.0.

Inoltre, dall'Eq. (6), ne consegue che:

$$\theta_e = \frac{V_u}{K x_{lim}} = \frac{x_y}{x_{lim}} = \frac{1}{\mu_{lim}} \quad (10)$$

essendo μ_{lim} la domanda di duttilità corrispondente alle condizioni di instabilità dinamica incipiente, spesso scritta nella forma $\mu_{lim} \theta_e = 1$.

2 EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NELLE STRUTTURE REALI MDOF

Con riferimento alle strutture reali aventi molti gradi di libertà, sono ben noti i parametri che regolano l'entità degli effetti del secondo ordine in campo elastico. In particolare, il modo migliore per valutare la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine è l'esecuzione di un'analisi di "buckling" che fornisce il valore del moltiplicatore critico elastico α_{cr} dei carichi gravitazionali. È, altresì, noto che la letteratura tecnica fornisce anche procedure semplificate per valutare α_{cr} senza ricorrere ad un'analisi agli autovalori-autovettori.

Pertanto, l'attenzione viene qui focalizzata sui parametri che regolano gli effetti del secondo ordine in campo plastico sottolineando che nel caso di strutture reali MDOF il fenomeno è complicato dalla fondamentale importanza della tipologia del meccanismo di collasso.

Come già fatto con riferimento ai sistemi SDOF, al fine di chiarire quali sono i parametri strutturali che misurano effettivamente la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine, l'attenzione viene qui focalizzata sulla forza di richiamo non lineare che si manifesta nel caso di un sistema strutturale pienamente plasticizzato quando si tiene conto degli effetti del secondo ordine. Facendo riferimento al tagliante della base, il legame tra la forza di richiamo non lineare e lo spostamento è tipicamente il risultato di un'analisi push-over (Fig. 2).

La Fig. 2 mostra una tipica curva tagliante di base - spostamento alla sommità risultante dall'analisi push-over di un sistema strutturale in cui le relazioni momento-rotazione delle zone dissipative sono modellate secondo un comportamento elastico-perfettamente plastico. Inoltre, la curva bilineare OA_1B_1 è la curva di push-over ideale che si ottiene trascurando gli effetti del secondo ordine e nell'ipotesi che tutte le cerniere plastiche necessarie per sviluppare un cinematisimo si formino contemporaneamente. Lo sviluppo simultaneo di cerniere plastiche si verifica tipicamente nel caso dei sistemi SDOF. Inoltre, la curva di equilibrio del meccanismo è data dalla retta a pendenza negativa passante per i punti A_2 e B_2 . Pertanto, la curva bilineare OA_2B_2 rappresenta la curva ideale di push-over nell'ipotesi, ancora una volta, che tutte le cerniere plastiche necessarie per sviluppare un meccanismo cinematico si formino simultaneamente, ma includendo l'influenza degli effetti del secondo ordine.

L'analisi rigido-plastica del secondo ordine fornisce tipicamente la curva di equilibrio del meccanismo secondo la seguente relazione [1,3,4]:

$$\alpha = \alpha_0 - \gamma\delta \quad (11)$$

dove α è il moltiplicatore delle forze sismiche orizzontali, δ è lo spostamento in sommità, α_0 è il moltiplicatore cinematicamente ammissibile valutato secondo la teoria rigido-plastica del primo ordine e γ è la pendenza della curva $\alpha - \delta$. Pertanto, le dimensioni di γ sono $[L^{-1}]$.

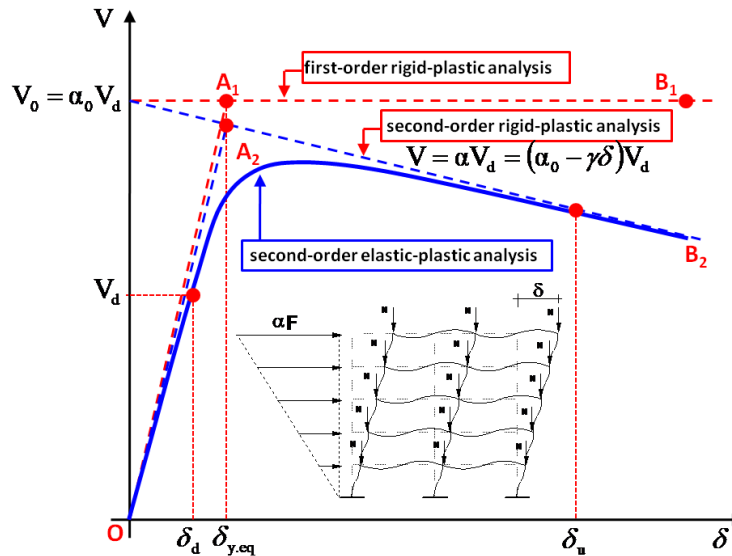


Fig. 2. Curva di push-over di strutture reali MDOF e parametro per la identificazione degli effetti del secondo ordine in campo plastico

Pertanto, indicando con V_d il tagliante alla base di progetto, la curva di equilibrio del meccanismo rappresentata nel diagramma tagliante di base - spostamento è rappresentata dalla seguente relazione:

$$\alpha V_d = (\alpha_0 - \gamma\delta)V_d = \alpha_0 V_d - \gamma V_d \delta = V_0 - (\gamma V_d)\delta \quad (12)$$

Confrontando tale relazione con l'Eq. (4), relativa ai sistemi SDOF, è evidente che nel caso di strutture reali, in campo plastico il coefficiente di stabilità θ_p può essere derivato eguagliando la pendenza dell'Eq. (4), con $\theta_e = \theta_p$, alla pendenza dell'Eq. (12):

$$K\theta_p = \gamma V_d \quad \text{ossia} \quad \theta_p = \gamma \frac{V_d}{K} = \gamma \delta_d \quad (13)$$

essendo δ_d lo spostamento sotto l'azione del tagliante alla base di progetto. Ovviamente il coefficiente di stabilità è un parametro adimensionale.

Poiché la pendenza della curva di equilibrio del meccanismo γ è fortemente influenzata dalla tipologia del meccanismo di collasso [1,3,4], l'equazione (13) mostra chiaramente che la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine in campo plastico dipende dal meccanismo di collasso. Inoltre, è anche evidente la principale differenza tra i sistemi SDOF e le strutture MDOF reali. Nel caso dei sistemi SDOF, la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine è governata dallo stesso parametro θ_e , dato dall'Eq. (3), sia in fase elastica che in fase plastica. Viceversa, nel caso di strutture MDOF reali, gli effetti del secondo ordine in fase elastica sono governati dal parametro $1/\alpha_{cr}$ e dal parametro θ_p , dato dall'Eq. (13), in fase plastica. Ciò si verifica a causa dell'influenza della tipologia del meccanismo di collasso sugli effetti del secondo ordine in campo plastico.

Con riferimento all'Eq. (3), è utile notare che per sistemi SDOF, detta $I/2$ l'inerzia della singola colonna, risulta:

$$\theta_e = \frac{N}{Kh} = \frac{N h^2}{12EI} \cong \frac{N h^2}{\pi^2 EI} = \frac{N}{N_{cr}} = \frac{1}{\alpha_{cr}} \quad (14)$$

Pertanto, per quanto riguarda gli effetti del secondo ordine, la differenza tra i sistemi SDOF e le strutture MDOF reali è da riferirsi alla fase plastica e, in particolare, al ruolo preminente dovuto alla tipologia del meccanismo di collasso.

Infatti, dalla teoria del controllo del meccanismo plastico, è ben noto che, dati i carichi gravitazionali, la pendenza della curva di equilibrio del meccanismo è influenzata dalla tipologia del meccanismo di collasso (Fig. 3) secondo le seguenti relazioni [3,4].

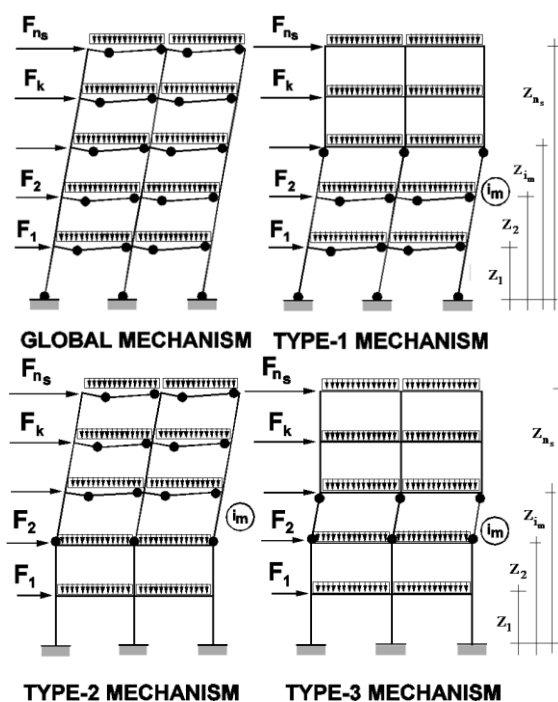


Fig. 3. Tipologie di meccanismi di collasso sotto azioni sismiche

- nel caso di meccanismo globale

$$\gamma^{(g)} = \frac{1}{z_{n_s}} \frac{\sum_{k=1}^{n_s} W_k z_k}{\sum_{k=1}^{n_s} F_k z_k} \quad (15)$$

- nel caso di meccanismi tipo 1

$$\gamma_{i_m}^{(1)} = \frac{1}{z_{i_m}} \frac{\sum_{k=1}^{i_m} W_k z_k + z_{i_m} \sum_{k=i_m+1}^{n_s} W_k}{\sum_{k=1}^{i_m} F_k z_k + z_{i_m} \sum_{k=i_m+1}^{n_s} F_k} \quad (16)$$

- nel caso di meccanismi tipo 2

$$\gamma_{i_m}^{(2)} = \frac{1}{z_{n_s} - z_{i_m-1}} \frac{\sum_{k=i_m}^{n_s} W_k (z_k - z_{i_m-1})}{\sum_{k=i_m}^{n_s} F_k (z_k - z_{i_m-1})} \quad (17)$$

- nel caso di meccanismi tipo 3

$$\gamma_{i_m}^{(3)} = \frac{1}{z_{i_m} - z_{i_m-1}} \frac{\sum_{k=i_m}^{n_s} W_k}{\sum_{k=i_m}^{n_s} F_k} \quad (18)$$

dove W_k è il carico gravitazionale totale agente al k-esimo piano, F_k è la forza sismica orizzontale agente al k-esimo piano, z_k è la quota dell'impalcato del k-esimo piano rispetto al livello di fondazione, i_m è l'indice del meccanismo e n_s è il numero di piani.

Tenendo conto che la pendenza della curva di equilibrio del meccanismo raggiunge il valore minimo quando si verifica un meccanismo di collasso globale, l'influenza della tipologia del meccanismo di collasso sulla pendenza della curva di equilibrio del meccanismo e, di conseguenza, sugli effetti del secondo ordine in campo plastico può essere espressa mediante i rapporti:

$$\Delta_{i_m}^{(t)} = \frac{\gamma_{i_m}^{(t)}}{\gamma^{(g)}} \quad (19)$$

essendo $t=1,2,3$ l'indice della tipologia del meccanismo. I parametri dati dall'Eq. (19) rappresentano i fattori di amplificazione degli effetti del secondo ordine in campo plastico a causa dell'influenza della tipologia del meccanismo di collasso.

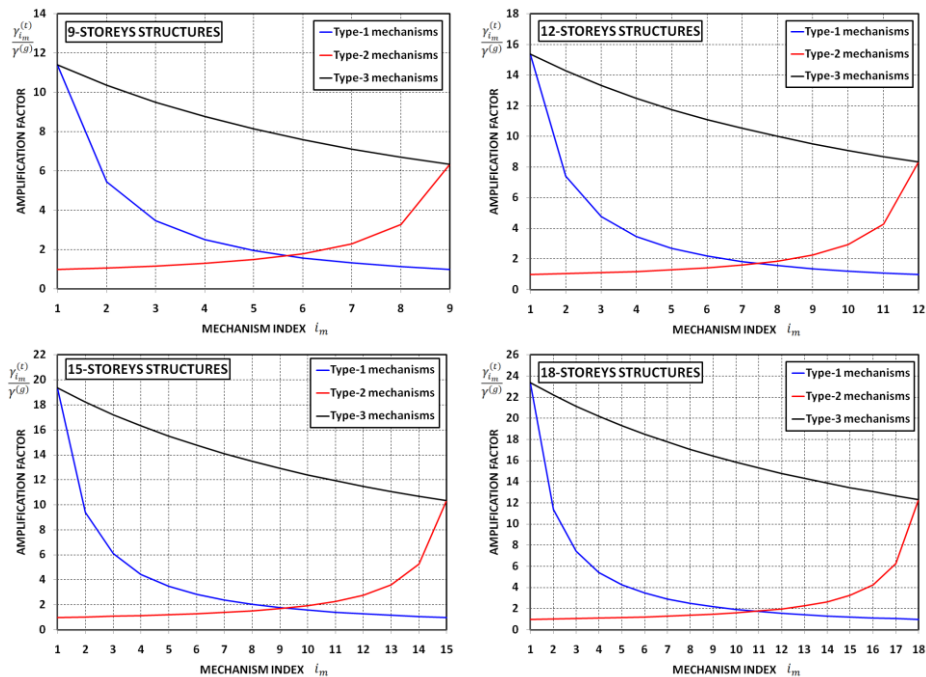


Fig. 4. Amplification of second-order effects in the plastic range due to the collapse mechanism typology

È utile notare che, con riferimento a strutture regolari aventi gli stessi carichi gravitazionali ad ogni piano, $W_k = W$, la stessa altezza di interpiano h tale che $z_k = kh$, e una distribuzione triangolare delle forze sismiche orizzontali tale che $F_k = kF_1$, i parametri di amplificazione degli effetti del

secondo ordine in campo plastico, per l'influenza della tipologia del meccanismo di collasso, sono dati da [1]:

- nel caso di meccanismi tipo 1

$$\Delta_{i_m}^{(1)} = \frac{n_s(2n_s + 1)(2n_s - i_m + 1)}{i_m[(i_m + 1)(2i_m + 1) + 3(n_s - i_m)(n_s + i_m + 1)]} \quad (20)$$

- nel caso di meccanismi tipo 2

$$\Delta_{i_m}^{(2)} = \frac{n_s(2n_s + 1)}{n_s - i_m + 1} \frac{n_s(n_s + 1) - (i_m - 1)[2(n_s + 1) - i_m]}{n_s(n_s + 1)(2n_s - 3i_m + 4) + i_m(i_m - 1)(i_m - 2)} \quad (21)$$

- nel caso di meccanismi tipo 3

$$\Delta_{i_m}^{(3)} = \frac{2}{3} \frac{n_s(2n_s + 1)}{n_s + i_m} \quad (22)$$

L'importanza della tipologia del meccanismo di collasso sulla pendenza della curva di equilibrio del meccanismo e, quindi, sugli effetti del secondo ordine in campo plastico è evidenziata in Fig. 4 dove sono rappresentati i fattori di amplificazione per edifici a 9, 12, 15 e 18 piani.

Non appena i fattori di amplificazione sono noti, l'Eq. (13) che fornisce il parametro che misura la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine in campo plastico può essere riorganizzato nella forma seguente:

$$\theta_p = \Delta_{i_m}^{(t)} \gamma^{(g)} \delta_d \quad (23)$$

Infine, tenendo conto che nel caso di strutture che collassano secondo il meccanismo globale:

$$\gamma^{(g)} \delta_d = \theta_e^{(g)} \cong \frac{1}{\alpha_{cr}} \quad (24)$$

il parametro che misura la sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine in campo plastico può essere scritto nella forma:

$$\theta_p = \Delta_{i_m}^{(t)} \frac{1}{\alpha_{cr}} = \Delta_{i_m}^{(t)} \theta_e^{(g)} \quad (25)$$

CONCLUSIONI

Il lavoro ha evidenziato la differenza tra il parametro per la misura della sensibilità strutturale agli effetti del secondo ordine in campo elastico e in campo plastico. Inoltre, nelle strutture MDOF essi sono disaccoppiati, nel senso che non risultano coincidenti come, invece accade nei sistemi SDOF. La differenza è dovuta all'influenza della tipologia del meccanismo di collasso.

REFERENCES

- [1] F.M. Mazzolani, V. Piluso (1996): "Theory and Design of Seismic Resistant Steel Frames", E & FN Spon, An imprint of Chapman & Hall, First Edition, 1996. ISBN 0-419-18760-X.
- [2] D. Bernal: "Amplification Factors for the Inelastic Dynamic P-Δ Effects in Earthquake Analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, 1987.
- [3] F.M. Mazzolani, V. Piluso (1997): "Plastic Design of Seismic Resistant Steel Frames", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 26, Issue 2, pp. 167-191, 1997.
- [4] R. Montuori, E. Nistri, V. Piluso: "Advances in Theory of Plastic Mechanism Control: Closed Form Solution for MR-Frames", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 44 (7), 1035-1054, 2015

KEYWORDS

Effetti del secondo ordine, meccanismi di collasso, instabilità dinamica.